数理解析研究所講究録
584巻 1986年 127-130

l-equivalenceに関して不変でない位相的性質

横浜国大　寺田敏司（Toshiji Terada）

位相空間 X に対して，X上の実数値連続関数全体の作る線形空間を $C(X)$ で表し，$C(X)$に各点収束の位相を与えて得られる位相線形空間を $C_p(X)$ で表す。位相線形空間 V, W が，線形同相のとき，$V \simeq W$で表すことにする。完全正則空間X, Y に対して，$C_p(X) \simeq C_p(Y)$ が成り立つとき，XとYは l-equivalent とよばれる。

l-equivalence に関して不変な位相的性質として，discreteness，compactness，pseudocompactness，σ-compactness，dim，nw，realcompactness，$\cdots$ などが，代表的なものとして知られている。

ここでは，l-equivalence に関して不変でない位相的性質について考えることにする。l-equivalence に関して不変でないことを示す一つの方法として，以下の補題を利用することがある。

一般に，位相空間 X の完全正則化を αX で表すことにする［2］。このとき，

補題 1.　$C_p(X) \simeq C_p(\alpha X)$ が成り立つ。

Y を位相空間 X の部分空間とするとき

$$C_p(X\,;\,Y) = \{ f \in C_p(X) : f(Y) = \{0\} \}$$

と定める。このとき，

補題 2（Pavlovskii）　Y が位相空間 X の部分空間で連続な線形拡張作用素 $u : C_p(Y) \longrightarrow C_p(X)$ が存在するとき，

$$C_p(X) \simeq C_p(Y) \times C_p(X\,;\,Y)$$

が成り立つ。

X を完全正則空間とし，Y を X の閉集合とするとき，X/Y で Y を一点 $*$ に縮めた X の商空間を表すことにする。このとき，

補題 3.　$C_p(X\,;\,Y) \simeq C_p(X/Y\,;\,*)$ が成り立つ。

以上の補題を用いて，次の反例が得られる。

例，$\mathcal{P}$ を位相的性質で，直和（位相的）に関して閉じているものとする。性質 $\mathcal{P}$ を持つ位相空間 X，Y が，次の条件をみたすようにとれるとき，$\mathcal{P}$ は l-equivalence に関して不変でない。

1） X，Y は可算無限個の孤立点を持つ。

2） $X \times Y$ は性質 $\mathcal{P}$ を持たない。

3） $\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\})$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つように Y の一点 y_0 がとれる。

実際，

$$\begin{aligned} C_p(X \times Y) &\simeq \mathbb{R} \times C_p(X \times Y) \\ &\simeq \mathbb{R} \times C_p(X \times Y;\ X \times \{y_0\}) \times C_p(X) \\ &\simeq \mathbb{R} \times C_p(X \times Y / X \times \{y_0\};\ *) \times C_p(X) \\ &\simeq \mathbb{R} \times C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\});\ *) \times C_p(X) \\ &\simeq C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\})) \times C_p(X) \\ &\simeq C_p(\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\}) \oplus X) \end{aligned}$$

であり，$X \times Y$ は性質 $\mathcal{P}$ を持たないが，$\alpha(X \times Y / X \times \{y_0\}) \oplus X$ は性質 $\mathcal{P}$ を持つ。

この例の応用として，Arhangel'skiǐ の１つの問題が解

決される。すなわち,

反例. 正規性は l-equivalence に関して不変でない。
実際, $X=\omega_1$, $Y=\omega_1+1$ を考えればよい。

次の Arhangel'skiĭ の問題は, 未解決である。
"countably-compactness, Lindelöf 性, k-space 性は l-equivalence に関して不変か? "

References

1. A. V. Arhangel'skiĭ, On linear homeomorphisms of function spaces, Soviet Math. Dokl. 25 (1982), 852-855.

2. H. Herrlich, Topologische Reflexionen und Coreflexionen, Springer Lecture note 78, (1968).

3. D. S. Pavlovskiĭ, On spaces of continuous functions, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 34-37.